

带有非线性边界条件的椭圆方程的解的存在性

朱红波

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 研究空间 Ω 上带有非线性边界条件的椭圆型方程的非平凡解, 其中 Ω 是 R^N ($N \geq 3$) 中的有界光滑区域, 非线性项 $f(x, s)$ 关于 s 在无穷远处渐近线性. 应用 Ekeland's 变分原理和 Mountain Pass 定理, 证明当非负参数 λ 充分小时, 方程至少存在两个不同的非平凡解.

关键词: 渐近线性; 非线性边界条件; Mountain Pass 定理

中图分类号: O175.25

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2011)04-0030-04

1 问题的提出

考虑方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + u(x) = f(x, u), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda |u|^{q-2} u, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

这里 Ω 是 R^N ($N \geq 3$) 中的有界光滑区域, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ 是外法线向量, 假设 $f(x, t)$ 满足下列条件:

(H_1) $f(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times R)$; $f(x, t) \equiv 0, \forall t \leq 0, x \in \Omega$; $f(x, t) \geq 0, \forall t \geq 0, x \in \Omega$.

(H_2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l \in (0, +\infty)$

关于 $x \in \Omega$ 一致成立.

研究带有边界值条件的椭圆方程的出发点是 Sobolev 迹嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ (参见文献 [1] 定理 5.36). 对于方程 (1), 当非线性项 $f(x, u)$ 是超线性时, 例如, $f(x, u) = |u|^{p-2}u, p > 2$, 关于方程 (1) 的解的存在性问题已被广泛研究过了, 具体可见文献 [2-3] 等.

定义 如果对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$, u 满足

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \lambda |u|^{q-2} u \varphi d\sigma,$$

这里 $d\sigma$ 是边界上的测度, 那么 $u \in H^1(\Omega)$ 是方程 (1) 的弱解.

众所周知, 寻找方程 (1) 的弱解等价于寻找下述定义在 $H^1(\Omega)$ 的能量泛函的非零的临界点:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma, \quad (2)$$

这里 $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds, 1 < q < 2$, 显然 $I \in C^1(H^1(\Omega), R)$.

为了寻找泛函 $I(u)$ 的临界点, 人们通常应用文献 [4] 中的山路定理, 但是应用此定理常常需要下述的技术性条件, 也就是, 存在 $\theta > 2, M > 0$ 使得

$$0 < \theta F(x, t) \leq f(x, t)t, |t| \geq M, x \in \Omega. \quad (\text{AR})$$

上述的 (AR) 条件对应验证 (PS) $_{c_0}$ 序列在 $H^1(\Omega)$ 中的有界性非常重要. 经过简单的计算可知, 如果非线性项 $f(x, u)$ 满足 (AR) 条件, 这就意味着在无穷远处 $f(x, u) \sim u^{1+\alpha}, \alpha > 0$. 由条件 (H_2) 可知, $f(x, u)$ 关于 u 在无穷远处渐近线性而非超线性, 这就意味着 (AR) 条件在本文中不满足.

设 λ_1 是算子 $-\Delta$ 的第一特征值, 即

$$\begin{cases} -\Delta u + u(x) = \lambda_1 u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

下面是主要结果:

定理 1 设有条件 (H_1) (H_2), $l \in (\lambda_1, +\infty)$, 则存在常数 $m = m(q, N, \Omega) > 0$, 当 $\lambda \in (0, m)$ 时, 方程 (1) 存在解 $u_1 \in H^1(\Omega)$ 且 $I(u_1) < 0$.

定理 2 设有条件 (H_1) (H_2), $l \in (\lambda_1, +\infty)$, 则存在常数 $m = m(q, N, \Omega) > 0$, 当 $\lambda \in (0, m)$ 时, 方程 (1) 存在解 $u_2 \in H^1(\Omega)$ 且 $I(u_2) > 0$.

注记: $\|u\| = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ 表示 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 中的范数.

大写字母 C 表示通用的常数.

收稿日期: 2011-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11026138)

作者简介: 朱红波 (1980-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为非线性偏微分方程.

2 局部极小值的存在性

为了证明定理 1, 首先引入文献 [5] 中的 Ekeland's 变分原理.

引理 1 设 (V, d) 是一完备的度量空间, 映射 $F: V \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ 下半连续并且有下界, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $v \in V$ 使得对所有的 $w \in V$

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon, F(w) \geq F(v) - \varepsilon d(v, w).$$

引理 2 设有条件 (H_1) (H_2) 且 $l \in (\lambda_1, +\infty)$, 则存在常数 $m = m(q, N, \Omega) > 0$ 使得对所有的 $\lambda \in (0, m)$,

1) 存在常数 $\rho > 0, \eta > 0$ 使得对任意的 $u \in H^1(\Omega)$ 且 $\|u\| = \rho$ 有 $I(u) \geq \eta > 0$.

2) 存在 $e \in H^1(\Omega)$ 且 $\|e\| > \rho$ 使得 $I(e) < 0$.

证明 1) 由条件 (H_2) 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ 和 C_ε , 使得

$$f(x, t) \leq \varepsilon t + C_\varepsilon t^p, \forall t \geq 0, x \in \Omega. \quad (3)$$

$$F(x, t) \leq \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \frac{C_\varepsilon}{p+1} t^{p+1}, \forall t \geq 0, x \in \Omega. \quad (4)$$

由 Sobolev 迹嵌入 $H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega), 1 < q \leq \frac{2(N-1)}{N-2}$, 有

$$\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1(\Omega), \quad (5)$$

因此, 综合式 (4)、式 (5), 由 Sobolev 嵌入定理可得

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - C_\varepsilon \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \frac{C_0 \lambda}{q} \|u\|^q \geq$$

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 - C_1 \varepsilon \|u\|^2 - C_2 \|u\|^{p+1} - \bar{C}_0 \lambda \|u\|^q = (C_3 - \bar{C}_0 \lambda \|u\|^{q-2} - C_2 \|u\|^{p-1}) \|u\|^2.$$

这里 $C_3 = \frac{1}{2} - C_1 \varepsilon$, 选择 $\varepsilon > 0$ 充分小使得 $C_3 > 0$, $\bar{C}_0 = \bar{C}_0(q, N, \Omega) > 0, C_2 = C_2(\varepsilon, N, \Omega) > 0$.

令 $g(t) = \bar{C}_0 \lambda t^{q-2} + C_2 t^{p-1}, \forall t \geq 0$, 这里 $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$, $q \in (1, 2)$. 显然

$$g'(t) = \bar{C}_0 (q-2) \lambda t^{q-3} + C_2 (p-1) t^{p-2}, g'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = [C_4 \lambda]^{\frac{1}{p-q+1}}, \text{ 其中 } C_4 = \frac{\bar{C}_0 (2-q)}{C_2 (p-1)}, \text{ 此时}$$

$$g(t_0) = \bar{C}_0 \lambda [C_4 \lambda]^{\frac{q-2}{p-q+1}} + C_2 [C_4 \lambda]^{\frac{p-1}{p-q+1}} = \bar{C}_0 \lambda^{\frac{p-1}{p-q+1}} C_4^{\frac{q-2}{p-q+1}} + C_2 C_4^{\frac{p-1}{p-q+1}} \lambda^{\frac{p-1}{p-q+1}} = C_5 \lambda^{\frac{p-1}{p-q+1}},$$

这里

$$C_5 = \bar{C}_0 C_4^{\frac{q-2}{p-q+1}} + C_2 C_4^{\frac{p-1}{p-q+1}}, \text{ 且 } \frac{p-1}{p-q+1} > 0.$$

这样, 对任意的 $p > 1$, 存在 $m = m(\varepsilon, q, N, \Omega) > 0$ 使得当 $\lambda < m$ 时, $g(t_0) < C_3$. 因此当 $\lambda < m$ 时, 取 $\rho = t_0$, 显然当 $\|u\| = \rho$ 时, $I(u) \geq \eta > 0$.

2) 由于 $\lambda_1 < l < +\infty$, 由条件 (H_2)

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s)}{s^2} = \frac{l}{2} > \frac{\lambda_1}{2} \text{ 关于 } x \in \Omega \text{ 一致成立.}$$

设 φ_1 是算子 $-\Delta$ 的第一特征值对应的特征函数, 由 Fatou's 引理, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t\varphi_1)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda t^{q-2}}{q} \int_{\partial\Omega} |\varphi_1|^q d\sigma - \int_{\Omega} \frac{F(x, t\varphi_1)}{t^2} dx \right] \leq \frac{1}{2} \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx - \frac{l}{2} \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx < 0.$$

这样, 可以选择 $e = t_0 \varphi_1, t_0 > 0$ 充分大, 使得 $I(e) < 0$.

证明 (定理 1)

定义 $\bar{B}_\rho = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\| \leq \rho\}; \partial \bar{B}_\rho = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\| = \rho\}$, 其中 ρ 为引理 2 中所示, $\bar{B}_\rho$ 是带有下列距离的完备的度量空间

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\|, \forall u, v \in \bar{B}_\rho,$$

由引理 2 可知, $I(u) \geq \eta > 0, \forall u \in \bar{B}_\rho$.

显然, $I \in C^1(\bar{B}_\rho, R)$, 因此 I 下半连续并且在 $\bar{B}_\rho$ 上有下界. 令

$$C = \inf\{I(u) : u \in \bar{B}_\rho\}.$$

断言: $C < 0$.

事实上, 假设 $v \in H^1(\Omega)$ 是

$$\mu_q = \inf_{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma \right)^{\frac{2}{q}}}$$

的可达元, 则 $|v|$ 也是 μ_q 的可达元, 从而可以假设

$$\int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma > 0, \text{ 因此}$$

$$I(tv) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda t^q}{q} \int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma - \int_{\Omega} F(x, tv) dx \leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda t^q}{q} \int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma - \frac{lt^2}{2} \int_{\Omega} v^2 dx \leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda t^q}{q} \int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma.$$

注意到 $1 < q < 2$, 所以当 $t > 0$ 并充分小时, 有

$$I(tv) \leq \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda t^q}{q} \int_{\partial\Omega} |v|^q d\sigma < 0.$$

由引理 1, 对任意的 $k > 0$, 存在 $u_k \in H^1(\Omega)$ 使得

$$C \leq I(u_k) \leq C + \frac{1}{k};$$

$$I(w) \geq I(u_k) - \frac{1}{k} \|u_k - w\|, \forall w \in \bar{B}_\rho.$$

类似于文献[6]中的讨论,那么在 $H^{-1}(\Omega)$ 中, $I'(u_k) \xrightarrow{k} 0$,这里 $H^{-1}(\Omega)$ 是 $H^1(\Omega)$ 的对偶空间.因此,由Sobolev紧嵌入定理,存在 $u_1 \in H^1(\Omega)$ 满足 $I'(u_1) = 0, I(u_1) = C_1 < 0$,这样就完成了定理1的证明.

3 山路引理型解的存在性

为了得到方程(1)的另一个解,将利用文献[7]中的Mountain Pass定理.

引理3 设 E 是实Banach空间, E^* 是其对偶空间,假设 $I \in C^1(E, R)$ 且满足条件

$$\max\{I(0), I(e)\} \leq \mu < \eta \leq \inf_{\|u\|=\rho} I(u),$$

其中 $\mu < \eta, \rho > 0, e \in E$,并且 $\|e\| > \rho$. 设 $c \geq \eta$ 表示为

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq \tau \leq 1} I(\gamma(\tau)),$$

这里 $\Gamma = \{\gamma \in C[0, 1], E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ 是连接0和 e 的连续路径的集合,则存在序列 $\{u_n\} \subset E$ 使得

$$I(u_n) \xrightarrow{n} c \geq \eta; (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{E^*} \xrightarrow{n} 0.$$

证明(定理2)

设 ρ, η, e 如引理2所示,应用引理3,其中不妨令 $\mu = 0, E = H^1(\Omega), c$ 如引理3所定义,则存在序列 $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ 使得

$$I(u_n) \xrightarrow{n} c > 0; (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\|_{E^*} \xrightarrow{n} 0.$$

由Sobolev嵌入定理的紧性可知,如果 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界,则存在 $u_2 \in H^1(\Omega)$ 使得 $I'(u_2) = 0, I(u_2) = c > 0$.

现在就开始证明序列 $\{u_n\}$ 的有界性. 假设

$\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$, 令 $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\{w_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中有界,从而存在子序列(仍记为) $\{w_n\}, w \in H^1(\Omega)$ 使得

w_n 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛到 w, w_n 在 Ω 中几乎处处收敛到 w ;

w_n 在 $L^r(\Omega)$ 中强收敛到 w , 其中 $1 \leq r < 2^* = \frac{2N}{N-2}$;

w_n 在 $L^s(\partial\Omega)$ 中强收敛到 w , 其中

$$1 < s < \frac{2(N-1)}{N-2}. \quad (6)$$

断言: $w \neq 0$. 事实上,如果 $w = 0$,由条件 (H_2) 和式(6)得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |w_n|^q d\sigma = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} F(x, w_n) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x, w_n) w_n dx = 0.$$

由 $\|u_n\| \|I'(u_n)\|_{E^*} \xrightarrow{n} 0$,可以得到 $\langle I'(u_n), u_n \rangle \xrightarrow{n} 0$,即

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^q d\sigma = o(1). \quad (7)$$

式(7)乘以 $\frac{1}{\|u_n\|^2}$,注意到 $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$,则

$$\|w_n\|^2 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} dx - \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_{\partial\Omega} |w_n|^q d\sigma = o(1). \quad (8)$$

由于 $1 < q < 2, \|u_n\| \rightarrow +\infty$,则有

$$\frac{1}{\|u_n\|^{2-q}} \int_{\partial\Omega} |w_n|^q d\sigma = o(1). \quad (9)$$

由条件 $(H_1), (H_2)$ 可知,对任意的 $x \in \Omega, s \in R, 0 \leq \frac{f(x, s)}{s} \leq C$,因此

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} dx \leq C \int_{\Omega} w_n^2 dx = o(1). \quad (10)$$

综合式(8)、(9)、(10)可以推出 $\|w_n\|^2 \xrightarrow{n} 0$,这与 $\|w_n\| = 1$ 相矛盾,所以 $w \neq 0$.

下面将证明 $w(x)$ 在 Ω 上几乎处处大于零. 由

于 $\|I'(u_n)\|_{E^*} \xrightarrow{n} 0$,所以对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$,有

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi) dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) \varphi dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q-2} u_n \varphi d\sigma = o(1). \quad (11)$$

式(11)两端分别乘以 $\frac{1}{\|u_n\|}$,得到

$$\int_{\Omega} (\nabla w_n \nabla \varphi + w_n \varphi) dx - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi dx - \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} \int_{\partial\Omega} |w_n|^{q-2} w_n \varphi d\sigma = o(1). \quad (12)$$

由 (H_1) 可知,对任意的 $s \leq 0, x \in \Omega, f(x, s) = 0$,有

$$\int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{u_n} w_n \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+} w_n^+ \varphi dx.$$

令 $p_n(x) = \frac{f(x, u_n^+)}{u_n^+}$,由 (H_2) 知,对任意的 $x \in \Omega$,存

在 $M > 0$ 使得 $0 \leq p_n(x) \leq M$. 选择合适的子列(仍记为 $p_n(x)$),则存在函数 $0 \leq h(x) \leq M$,使得 $p_n(x)$

在 $L^\infty(\Omega)$ 中弱*收敛到 $h(x)$,即 $p_n(x) \xrightarrow{*} h$. 又由

于在 $L^2(\Omega)$ 中, $w_n^+ \xrightarrow{n} w^+$,则

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (p_n(x) w_n^+ \varphi - h(x) w^+ \varphi) dx \right| \leq \\ & \left| \int_{\Omega} (p_n(x) w_n^+ \varphi - p_n w^+ \varphi) dx \right| + \\ & \left| \int_{\Omega} (p_n(x) w^+ \varphi - h w^+ \varphi) dx \right| \leq \\ & M \|w_n^+ - w^+\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \\ & \left| \int_{\Omega} (p_n(x) w^+ \varphi - h w^+ \varphi) dx \right| \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

因此,在式(12)中,令 $n \rightarrow +\infty$, 于是对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\Omega} h(x) w^+ \varphi dx. \quad (13)$$

在式(13)中,取 $\varphi = w^- = \min\{w, 0\}$, 则 $\int_{\Omega} (|\nabla w^-|^2 + |w^-|^2) dx = 0$, 这意味着 w^- 在 Ω 上几乎处处等于零,从而 $w \equiv w^+ \geq 0$. 由式(13)知道 $w \geq 0$ 是如下方程(14)的弱解,

$$-\Delta w + w = h(x) w^+ \geq 0. \quad (14)$$

由文献[2]中的强极值原理可知在 Ω 上几乎处处大于零. 由式(6)看到 $w_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n\|} \xrightarrow{n} w(x) > 0$.

由假设 $\|u_n\| \xrightarrow{n} +\infty$, 从而 $u_n(x)$ 在 Ω 上几乎处处趋向无穷大,由条件 (H_2) 可得到 $p_n(x) \xrightarrow{n} l$, 因此 $h(x)$ 在 Ω 上几乎处处等于 l . 由式(14), 则对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\Omega} h(x) w^+ \varphi dx = l \int_{\Omega} w \varphi dx. \quad (15)$$

设 $\varphi_1 > 0$ 是算子 $-\Delta$ 的第一特征值 λ_1 对应的特征函数,也就是 $\varphi_1 > 0$ 满足:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 + \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = 0, \text{ on } \partial \Omega. \end{cases}$$

于是对任意的 $\varphi \in H^1(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} (\nabla \varphi_1 \nabla \varphi + \varphi_1 \varphi) dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi dx. \quad (16)$$

在式(16)中取 $\varphi = w$, 并且在式(15)中令 $\varphi = \varphi_1$, 则有

$$l \int_{\Omega} w \varphi_1 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} w \varphi_1 dx. \quad (17)$$

因为 $\varphi_1(x) > 0, w(x) > 0$, 所以 $\int_{\Omega} w \varphi_1 dx > 0$, 从而式(17)与 $l > \lambda_1$ 相矛盾. 这样就证明了序列 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的有界性, 于是就完成了定理2的证明.

参考文献:

- [1] Adams R A, Journier J. Sobolev Spaces [M]. Second edition. Amsterdam: Acad Press, 2003.
- [2] Garcia Azorero J, Peral I, Rossi J D. A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition [J]. J Differential Equations, 2004(198): 91-128.
- [3] Terraccini S. Symmetry properties of positive solutions to some elliptic equations with nonlinear boundary conditions [J]. Differential Integral Equations, 1995(8): 1911-1922.
- [4] Ambrosetti A, Rabinowitz P. Dual variational methods in critical points theory and applications [J]. J Funct Anal, 1973(14): 349-381.
- [5] Ekeland I. Nonvex minimization problems [J]. Bull Amer Math Soc, 1979(1): 443-473.
- [6] Li Shujie, Wu Shaoping, Zhou Huansong. Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities [J]. J Differential Equations, 2002(185): 200-224.
- [7] Schechter M. A variation of the Mountain Pass lemma and applications [J]. J London Math Soc, 1991(44): 491-502.

Solutions to an Asymptotically Linear Elliptic Problem with Nonlinear Boundary Conditions

Zhu Hong-bo

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: It studies the existence of nontrivial solutions to an asymptotically linear elliptic problem with nonlinear boundary conditions on Ω , where Ω is a bounded smooth domain in R^N ($N \geq 3$), and the nonlinear term $f(x, u)$ is asymptotically linear with respect to u at infinity. By Ekeland's variational principle and a variant version of Mountain Pass Theorem, it proves that there exist at least two nontrivial solutions if the non-negative parameter λ is small enough.

Key words: asymptotically linear; nonlinear boundary conditions; Mountain Pass Theorem